

# INVESTIGATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DES PLAQUES RAIDIES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

Par

**M.K BERRAH**

Maître de Conférence, Département de Génie Civil, ENP(\*) (Alger)

**M. DEMIDEM**

Chargé de Cours, Département de Génie Civil, ENP (Alger)

**M. HADID**

Ingénieur d'Etat en Génie Civil, ENP (Alger)

**A.A BENAZOUZ**

Ingénieur d'Etat en Génie Civil, ENP (Alger)

## Résumé

*Le problème des plaques raidies est résolu par trois méthodes.*

*• La première est la méthode des éléments finis (F.E.M)(\*\*) utilisant un élément conforme. Cette méthode est utilisée conjointement avec le principe d'homogénéisation d'une plaque raidie en une plaque orthotrope équivalente.*

*La deuxième méthode consiste à étudier les plaques raidies par la méthode des éléments finis en utilisant un couplage des éléments plaque et poutre.*

*La dernière méthode de résolution est la méthode des équations intégrales aux frontières (B.E.M)(\*\*), utilisant la solution fondamentale du problème de flexion et le processus d'homogénéisation.*

*Enfin, quelques exemples sont traités (plaque encastree, appuyée), qui mettent en évidence les performances de ces différentes méthodes.*

**Mots clés :** éléments finis - équations intégrales aux frontières - plaques minces - plaques raidies - raidisseurs - théorie de kirchhoff - homogénéisation - orthotropie.

## 1 INTRODUCTION

L'étude des plaques raidies est un problème qui revêt un grand intérêt pour l'ingénieur constructeur. Différentes méthodes de calcul ont fait l'objet de nombreux travaux analytiques. Cependant, avec l'avènement des techniques numériques, l'ingénieur peut traiter ces problèmes par des méthodes telles que les différences finies, les éléments finis et les équations intégrales aux frontières. La méthode des équations intégrales aux frontières ayant prouvé son efficacité dans l'élasticité à deux et trois dimensions, trouve son champ d'application dans d'autres domaines et en particulier dans la flexion des plaques minces. A cet effet, nous avons choisi une formulation efficace résultant des travaux simultanés de Bezine [1] et de Stern [2].

Nous développons dans le cadre de ce travail trois formulations différentes :

- Une formulation orthotrope homogénéisée des plaques raidies par la F.E.M.
- Une formulation plaques-poutres des plaques raidies par la B.E.M.
- Une formulation intégrale des plaques raidies en utilisant la solution fondamentale classique de la flexion des plaques minces.

(\*) Ecole Nationale Polytechnique.

(\*\*) Abréviation anglaise.

## 2 HYPOTHESES

- Les théories de Kirchhoff et de Bernoulli sont respectivement retenues pour l'étude des comportements des plaques et des raidisseurs.
- La plaque et les raidisseurs constituent un élément monolithique.

## 3 FORMULATION ORTHOTROPE DES PLAQUES RAIDIES HOMOGENEISEES

La formulation orthotrope consiste à remplacer une plaque réelle (qui peut être de forme complexe) par une plaque de géométrie homogène avec une orthotropie fictive présentant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion.

Cette formulation est déduite du principe d'homogénéisation qui, dans notre étude, consiste à étaler continûment les rigidités des nervures sur une largeur égale à leur entre-axe. Ainsi, pour ce modèle, la formulation numérique peut être faite systématiquement en déterminant seulement la matrice de rigidité d'une plaque orthotrope.

On a choisi l'élément rectangulaire conforme, à quatre noeuds et à quatre degrés de liberté par noeud à savoir la flèche, les deux rotations suivant les deux axes de coordonnées et le gauchissement.

Le vecteur déplacements nodaux est donc :

$$\{u_i\} = \{w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{xyi}\}^T \quad (1)$$

Le vecteur forces nodales correspondant est :

$$\{F_i\} = \{T_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{xyi}\}^T \quad (2)$$

Pour trouver le champ de déplacement qui satisfait aux limitations de conformité de l'élément, il est possible d'utiliser le produit de fonction de forme unidimensionnelle de la poutre chacune portant sur l'une des directions  $x$  ou  $y$  :

$$w(x,y) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3) (b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3) \quad (3)$$

Dans notre étude, on a déterminé la matrice de rigidité élémentaire d'une plaque orthotrope par une méthode pseudo-analytique qui évite, d'une part, l'intégration et la dérivation numérique, et, d'autre part, la détermination laborieuse des expressions d'éléments de la matrice de rigidité élémentaire.

Cette méthode consiste à calculer analytiquement :

$$[R] = \int_V [Q]^T [D] [Q] dv \quad (4)$$

et numériquement

$$[K] = [A^{-1}]^T [R] [A^{-1}] \quad (5)$$

avec :

[A] : Matrice reliant les déplacements nodaux aux coordonnées généralisées.

[Q] : Matrice reliant le vecteur déformation au vecteur des coordonnées généralisées.

[D] : Matrice d'élasticité.

La matrice d'élasticité [D] est définie comme suit :

$$D = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

L'état de déformation dans l'élément est représenté par :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (6)$$

Les coefficients de rigidités équivalentes sont définis suivant la disposition des raidisseurs.

Ainsi, pour une plaque renforcée en croix par deux séries équidistantes de raidisseurs symétriques par rapport à son plan moyen, les coefficients de rigidités équivalentes sont donnés [3] :

$$D_x = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E I_x}{s}, \quad D_y = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E I_y}{s} \quad (7)$$

$$D_1 = \frac{\mu E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_{xy} = \frac{E h^3}{24(1+\mu)}$$

$I_x$  ou  $I_y$  : Moment d'inertie d'une pièce du raidisseur.

$s$  : Espacement des raidisseurs.

$E$  : Module de Young.

$\mu$  : Coefficient de Poisson.

## 4 FORMULATION PLAQUES-POUTRES DES PLAQUES RAIDIES

Cette formulation consiste à étudier le système original de la plaque en le reconstruisant à partir de ses constituants. Ainsi, l'analyse des plaques raidies par la F.E.M peut être approchée par l'assemblage des deux comportements des plaques et des poutres en introduisant l'influence mutuelle entre les deux éléments.

La matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire d'une plaque isotrope peut être déduite directement de la matrice de rigidité élémentaire orthotrope déjà établie en remplaçant les coefficients de la

matrice d'élasticité orthotrope par les coefficients de la matrice d'élasticité isotrope.

D'où :

$$D_x = D_y = D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}, D_1 = \mu D, \quad (8)$$

$$D_{xy} = \frac{1}{2} D(1 - \mu)$$

La matrice de rigidité de la poutre est donnée dans [4], où :

$I_c$  : est l'inertie équivalente de la poutre  $I_c = I + c^2 A$ ,  
 $c$  : est la distance entre les deux axes de la poutre et de la plaque,

$A$  et  $I$  : sont respectivement l'aire et l'inertie par rapport au centre de gravité de la poutre.

### 5 FORMULATION INTEGRALE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

La formulation intégrale aux frontières de la flexion des plaques minces en accord avec la théorie de Kirchhoff est basée sur :

□ L'équation différentielle :

$$\nabla^4 w = q/D \quad (9)$$

□ Le théorème de réciprocité comme l'identité de Rayleigh-Green généralisée à une frontière possédant  $N$  points anguleux :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ V_n(w) u - M_n(w) \frac{du}{dn} + \frac{dw}{dn} M_n(u) - w V_n(u) \right\} ds = \quad (10)$$

$$= D \int_{\Omega} (u \nabla^4 w - w \nabla^4 u) da - \sum_{k=1}^n \left[ [m_k(w)] u - [M_k(u)] w \right]_{\lambda_k}$$

□ La solution fondamentale :

$$u = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (11)$$

Deux équations intégrales aux frontières sont obtenues [1] :

$$cw|_p + \int_{\partial\Omega} \left\{ V_n(u)w - M_n(u) \frac{dw}{dn} + \frac{du}{dn} M_n(w) - u V_n(w) \right\} ds$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left[ [M_{nt}(u)] w - [M_{nt}(w)] u \right]_{\lambda_k} = \int_{\Omega} uq da \quad (12)$$

avec  $c = 1$  quand  $p \in \Omega$  et  $c = 1/2$  quand  $p \in \partial\Omega$ .

$$\frac{1}{2} \frac{dw}{dn} \Big|_p + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial V_n(u)}{\partial n_0} w - \frac{\partial M_n(u)}{\partial n_0} \frac{\partial w}{\partial n} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial n_0 \partial n} M_n(w) - \frac{\partial u}{\partial n_0} V_n(w) \right\} ds +$$

$$\sum_{k=1}^n \left[ \left[ \frac{\partial M_{nt}(u)}{\partial n_0} w - \frac{\partial u}{\partial n_0} M_{nt}(w) \right] \right]_{\lambda_k} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_0} q da \quad (13)$$

Avec :

$q$  : Charge transversale répartie par unité de surface.  
 $w$  : Solution de l'équation de Lagrange.

$u$  : Solution élémentaire de l'équation biharmonique  $\nabla^4 u = 0$ .

$M_n$  : Moment normal de flexion associé soit à  $w$  soit à  $u$ .

$k_n$  : Effort tranchant de Kirchhoff associé soit à  $w$  soit à  $u$ .

$M_{nt}$  : Moment de torsion associé soit à  $w$  soit à  $u$ .

$[[0]]_{\lambda_k}$  : représente le saut de la fonction  $o$  au point  $\lambda_k$  d'abscisse curviligne  $s_i$  tel que :

$$[[0]]_{\lambda_k} = (o)_{s_k^+} - (o)_{s_k^-}$$

Le moment de torsion normal  $M_{nt}$  n'existe que dans les coins et n'est pas une inconnue fondamentale du problème. Il sera exprimé en fonction de la pente normale par :

$$M = -D(1 - \mu) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (14)$$

Les intégrales des surfaces des équations (12) et (13) peuvent être ramenées à la frontière, elles sont données dans [5].

### 6 FORMULATION INTEGRALE DE LA FLEXION DES PLAQUES RAIDIES

Pour appliquer la méthode des équations intégrales aux frontières aux plaques raidies, il nous a fallu associer à cette plaque un modèle fictif équivalent d'une plaque isotrope ayant un coefficient de rigidité flexionnelle équivalent donné par :

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} + \frac{E I}{s} \quad (15)$$

### 7 APPLICATIONS

Nous avons appliqué ces trois méthodes à deux exemples qui vont nous permettre d'évaluer leurs performances. Ces deux exemples ont été traités dans [6], en utilisant une approche de type B-Spline function : plaque carrée, renforcée par deux raidisseurs, un dans chaque direction. Cette plaque est chargée transversalement par une charge uniforme  $q = 0.5 \text{ kg/cm}^2$  et a pour dimensions  $a = b = 20.18 \text{ cm}$ , l'épaisseur  $t = 0.2817 \text{ cm}$ . La poutre a une inertie  $I = 5.96 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^4$  et une excentricité nulle.

Les caractéristiques mécaniques sont :

$$E = 2.116 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \text{ et } \mu = 0.3.$$

On note que l'analyse des erreurs effectuée au niveau de la conclusion est relative aux données expérimentales trouvées dans [6].

## 8 CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent que le problème de la flexion d'une plaque raidie peut être approché par trois méthodes différentes chacune ayant ses particularités :

- La méthode des éléments finis basée sur une formulation orthotrope est une méthode simple et rapide mais qui tolère une erreur moyenne de 6% en termes de déplacements et 13% en termes d'efforts.
- La méthode des éléments finis basée sur une formulation discrète de plaques-raidisseurs est une méthode plus compliquée que la première mais qui est la plus précise des trois. Elle tolère une erreur moyenne de 2.5% en termes de déplacements et 6% en termes d'efforts.
- La méthode des équations intégrales est une méthode puissante à cause de son système de discrétisation qui ne concerne que la frontière de la plaque, mais c'est la méthode qui présente le plus de difficultés de formulation et de programmation. Sa précision est de 4.5% en termes de déplacements ⑥

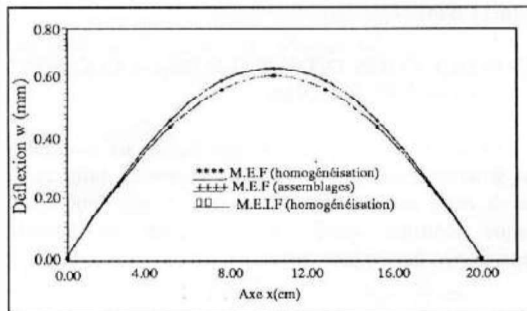


Figure 1 : Plaque carrée appuyée simplement courbes comparatives de la variation de la déflexion suivant l'axe x pour  $y = b/2$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Bezine : "Boundary Integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions". Mech. Res. Comm, 1978, 5(4).
- [2] M. Stern : "A General boundary intégral formulation for the numerical solution of plate bending problems". Int. J. Solides Structures, Vol 15, pp 769-782 (1979).
- [3] S. Timoshenko, S. Woinowsky and S. Krieger : "Theory of Plates and Shells". Mc Graw-Hill, New York, 1959.
- [4] K.J. Bathe : "Finite element procedures in engineering analysis". Prentice-Hill, 1982.
- [5] M. Hadid et A.A. Benazzouz : "Investigation numérique du comportement des plaques raidies par la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales aux frontières". Projet de fin d'études, Ecole Nationale Polytechnique Alger, 1992.
- [6] Shen Peng-Cheng, Huangdad and Wang Zongmu : "Static, vibration and stability analysis of stiffened plates using B. Spline functions". Computers & Structures Vol 27, N°1, pp 73-78, 1987.

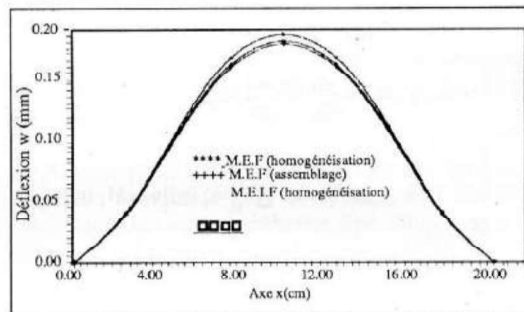


Figure 2 : Plaque carrée encasturée courbes comparatives de la variation de la déflexion suivant l'axe x pour  $y = b/2$ .